

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Deoarece $\sigma^6 = e$, rezultă că $\sigma^{2009} = \sigma^5 = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Alegem, de exemplu, $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Obținem

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ (sau alegem } \tau = \sigma^2 \text{)}.$$

c) Cum $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^{121} \in S_5$, $\exists q \geq r$ cu $\tau^q = \tau^r$. Luăm $p = q - r$.

2. a) Se arată că soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{ 1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$.

b) Utilizând relațiile lui Viète obținem $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Dacă ecuația ar avea mai mult de o rădăcină reală, deoarece ea are coeficienți reali, ea ar avea toate rădăcinile reale. Deoarece $S = 0$, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, fals.

c) Utilizând relațiile lui Viète, obținem $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3) \left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \right) = -4$.